

João Marcelo Taveira do Amaral

# **Teoria de Apreçamento de Ativos: Teoria e Evidências**

Brasília

2016



João Marcelo Taveira do Amaral

## **Teoria de Apreçamento de Ativos: Teoria e Evidências**

Monografia submetida ao Curso de Graduação do Departamento de Economia da Universidade de Brasília, como requisito para obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômicas

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia

Departamento de Economia

Orientador: José Guilherme de Lara Resende

Brasília

2016

João Marcelo Taveira do Amaral

## **Teoria de Apreçamento de Ativos: Teoria e Evidências**

Monografia submetida ao Curso de Graduação do Departamento de Economia da Universidade de Brasília, como requisito para obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômicas

Trabalho aprovado. Brasília, 02 de dezembro de 2016:

---

**José Guilherme de Lara Resende**  
Orientador

---

**Daniel Oliveira Cajueiro**  
Convidado

Brasília  
2016

# Resumo

Graças ao rápido desenvolvimento dos mercados financeiros globais durante o século XX surgia a necessidade de melhor entender e precificar os diferentes tipos de ativos negociados. A partir do desenvolvimento das teorias de portfólio de Markowitz e Tobin, criou-se o primeiro modelo de apreçamento de ativos, o CAPM. Embora o modelo tenha apresentado dificuldades em comprovar-se empiricamente, ainda sim foi considerado como um grande avanço na literatura de finanças. O ICAPM e o CCAPM surgiram como uma extensão do CAPM, melhorando potenciais falhas teóricas deste último. Além destes, Ross propôs um modelo baseado em métodos estatísticos para determinar quais as variáveis que afetam os preços dos ativos. O modelo de Ross é chamado de APT. Esse trabalho consiste em uma revisão de literatura acerca dos principais modelos de apreçamento de ativos (Asset Pricing) e seus principais resultados empíricos.



# Abstract

Since the 20th century, financial markets around the globe have been rapidly developing and, as a consequence, new financial products were being created aiming to meet the needs of investors. But with new assets, there were also the necessity of new models to price it. Beginning with Markowitz and Tobin portfolio theory, it was created the first asset pricing model, the CAPM. Even lacking of solid empirical results, the model is still considered a breakthrough in finance literature. The ICAPM and the CCAPM were created as a natural extension of CAPM, improving the model flaws. Beyond those models, Ross proposed a model based in statistical methods aiming to find which variables affects the assets returns. The Ross's models is known as APT. In this work, we discuss the theory and the empirical evidence of those asset pricing models.





# Lista de ilustrações

Figura 1	– . . . . .	14
Figura 2	– . . . . .	18
Figura 3	– . . . . .	19
Figura 4	– . . . . .	20
Figura 5	– . . . . .	41



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Teoria de Carteiras Eficientes de Markowitz</b>	<b>13</b>
<b>2 Teoria de Portfólio de Tobin</b>	<b>15</b>
<b>3 A Teoria do Capital Asset Pricing Method (CAPM)</b>	<b>17</b>
3.1 O Modelo Sharpe-Lintner	17
3.2 Adaptações no Modelo Sharpe-Lintner	22
3.3 Teste Empíricos do Modelo	23
<b>4 <i>Intertemporal Capital Asset Pricing Model</i> (ICAPM)</b>	<b>29</b>
<b>5 <i>Consumption Capital Asset Pricing Model</i> (CCAPM)</b>	<b>31</b>
5.1 Testes Empíricos do CCAPM	33
<b>6 <i>Arbitrage Pricing Theory</i> (APT)</b>	<b>35</b>
6.1 Testes Empíricos do APT	40
6.2 Modelo de Três e Quatro Fatores	42
<b>7 Considerações Finais</b>	<b>45</b>
<b>8 Bibliografia</b>	<b>49</b>



# Introdução

Mercados financeiros não são algo novo do mundo moderno; sua presença é documentada desde século XIV em Veneza. Durante as expansões marítimas no século XVII, grandes centros econômicos como Holanda, França e Inglaterra, por exemplo, viam sua oferta por títulos de empresas aumentarem consideravelmente. Assim como a existência dos mercados não é novidade tampouco são suas crises. Independente das razões que resultam no surgimento de crises financeiras, a consequência para a sociedade é bem conhecida: recessão, desemprego e redistribuição de riqueza são alguns dos efeitos negativos que afetam o bem-estar da sociedade. Mesmo não sendo um fenômeno recente, foi somente durante o século XX que se desenvolveram teorias que objetivassem entender melhor como são determinados os preços dos ativos financeiros.

Markowitz (1956) foi o primeiro autor a contribuir significativamente com a literatura. Embora seu trabalho seja focado em teoria de portfólio, seus resultados, juntamente com os resultados de Tobin (1958), são fundamentais para o início do desenvolvimento da teoria de apreçamento de ativos. Utilizando a teoria de portfólio elaborada por Tobin e Markowitz, Sharpe (1964) e Lintner (1965) foram os responsáveis pelo primeiro modelo de apreçamento de ativos, o CAPM. O CAPM propôs com os conceitos de carteira eficiente de mercado e risco sistemático a existência de uma única medida de risco que influenciava o retorno esperado de ativos, o beta.

Merton (1973) com seu modelo ICAPM e, posteriormente, Breeden (1979) com o CCAPM criaram modelos que possibilitavam relacionar o retorno de ativos com outras variáveis de estado como, por exemplo, o consumo. O ICAPM e CCAPM possuem hipóteses e conceitos teóricos mais avançados em relação ao CAPM. No entanto, essa melhora teórica não foi acompanhada por resultados empíricos mais significantes. Ross (1976) baseado em técnicas estatísticas e com o conceito de equilíbrio por arbitragem cria o APT como possível alternativa aos modelos anteriormente propostos.

O objetivo deste trabalho será expor os conceitos teóricos por trás destes modelos assim como seus resultados empíricos e principais críticas.



# 1 Teoria de Carteiras Eficientes de Markowitz

Harry Markowitz em seu artigo Portfolio Selection (1952) e posteriormente em seu livro Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments (1959) teorizou como o investidor racional construí seus portfólios. O investidor no modelo de Markowitz se importa com apenas duas características de determinado ativo: o retorno esperado e variância. Quanto maior o retorno esperado, maior a utilidade do investidor enquanto quanto maior a variância, menor a utilidade. Portanto, o investidor deseja buscar uma solução para o trade-off entre média e variância. O modelo de média-variância de Markowitz pode ser descrito solucionando o seguinte problema:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} x_i x_j \quad (1.1)$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^N x_i \bar{r}_i = \mu \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (1.3)$$

$$x_i \geq 0 \quad (1.4)$$

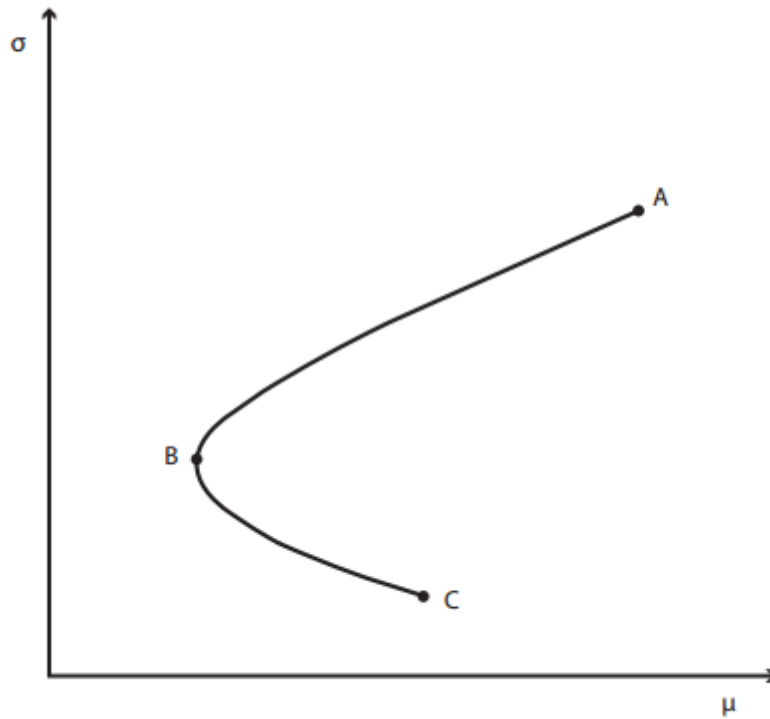
$$i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Onde,  $N$  = número de ativos candidatos a compor o portfólio,  $x_i$  = fração do capital a ser aplicado no ativo  $i$ ,  $\sigma_{ij}$  = covariância entre os retornos dos ativos  $i$  e  $j$  e  $\bar{r}_i$  = valor esperado do retorno do portfólio.

A função objetivo (1.1) tem como finalidade minimizar a variância do portfólio. A equação (1.2) determina o valor do retorno esperado, a (1.3) determina que todo o capital disponível seja investido e a (1.4) garante a não possibilidade de vender o ativo  $i$  a descoberto. O investidor deseja buscar para cada valor de retorno esperado, a menor variância possível. Como os ativos não são perfeitamente correlacionados entre si, é possível por meio da diversificação obter um portfólio com um risco menor. O retorno esperado, por outro lado, é apenas a soma ponderada pelo peso relativo do ativo no portfólio. Dessa forma, o primeiro resultado encontrado por Markowitz diz que a diversificação permite encontrar carteiras de ativos ótimas que representem o maior retorno esperado possível

dado um nível de variância. A combinação dessas diferentes carteiras ótimas compõe a fronteira de médio variância, ilustrada abaixo:

Figura 1:



O segundo resultado de Markowitz mostra a diferenciação entre o risco de um ativo individual e a sua contribuição para o risco total do portfólio. A variação do ativo individual passa a ser irrelevante; o que importa é a contribuição do risco do ativo individual no risco do portfólio (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999).



## 2 Teoria de Portfólio de Tobin

Tobin em seu artigo *Liquidity preference as behavior towards risk* (1958) complementou o estudo de portfólios iniciado por Markowitz em 1952. O investidor no modelo de Tobin também tem preferências definidas entre o retorno esperado de um ativo e seu desvio-padrão. Diferentemente de Markowitz, que construiu uma teoria de carteiras considerando somente ativos arriscados, o agente econômico no modelo de Tobin deseja definir que proporção de sua riqueza será mantida em ativos livre de risco e ativos arriscados; essa separação é feita por meio do Teorema da Separação dos Fundos.

O Teorema da Separação dos Fundos mostra que o indivíduo, ao escolher os ativos que irão compor seu portfólio, pode acabar escolhendo uma proporção de ativos considerados livre de risco além de um único portfólio de ativos arriscados. Assim, é simplificado o processo de seleção ótima de carteiras: a escolha do consumidor é resumida a quanto investir em dois fundos, um composto por ativo sem risco e o outro por ativo com risco (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999). A inclusão de ativos livre de risco na elaboração da teoria de portfólios foi um avanço em relação à teoria de Markowitz, que somente continha ativos com risco, pois apresentava uma explicação a um comportamento que já se observava no mercado financeiro. Esse conceito foi usado posteriormente por Sharpe e Lintner para elaborar uma das teorias de apreamento de ativos mais importantes de finanças modernas, o CAPM.



## 3 A Teoria do Capital Asset Pricing Method (CAPM)

John Lintner (1965), Jan Mossin (1966), William Sharpe (1964) e Jack Treynor (1962) desenvolveram simultânea e independentemente modelos semelhantes para descrever o retorno de ativos. O modelo CAPM, como ficou posteriormente popularizado, revolucionou a teoria e a prática da análise de investimentos (SULLIVAN, 2006). Embora os quatro autores tenham derivados modelos semelhantes, apenas William Sharpe recebeu o Prêmio Nobel em 1990 pelo seu trabalho na teoria de precificação de ativos. Iremos agora expor os principais resultados obtidos pelos trabalhos de William Sharpe em *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk* (1964) e de John Lintner em *The Valuation of Risk Assets and The Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets* (1965), além das alterações de hipóteses realizadas por Black em *Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing* (1972). Alguns autores referem-se a esse modelo como modelo Black-Sharpe-Lintner.

### 3.1 O Modelo Sharpe-Lintner

Sharpe inicia seu trabalho citando a incipiência na teoria econômica em explicar a relação entre preço e risco de um ativo. Embora o preço possa ser separado em preço do tempo (preço do dinheiro no tempo) e preço do risco (preço por incorrer mais risco) a teoria não explicava de que maneira o preço do risco se relacionava com as preferências individuais do investidor, atributos dos ativos de determinado setor e empresa e outras características. Markowitz (1952) havia demonstrado que, ao se diversificar o portfólio, o risco inerente a algum ativo podia ser eliminado. Portanto, o objetivo central do modelo de Sharpe-Lintner era criar uma teoria de equilíbrio geral de preços dos ativos sob condições de risco para esclarecer a relação entre o preço de um ativo e os vários componentes do risco.

O agente econômico ao realizar algum investimento está preocupado com dois parâmetros: O valor esperado da sua Riqueza após o investimento ( $E_w$ ) assim como seu desvio-padrão ( $DP_w$ ). Podemos expressar uma função de utilidade  $U$  como função desses dois parâmetros ( $U = f(E_w ; DP_w)$ ). A partir do mesmo princípio do modelo de média-variância, temos que quanto maior o valor esperado da riqueza, maior a utilidade esperada do indivíduo ( $\partial U / \partial E_w > 0$ ), e quanto maior o desvio-padrão, menor a utilidade esperada do indivíduo ( $\partial U / \partial DP_w < 0$ ).

O investidor deve escolher seus investimentos objetivando maximizar sua utilidade.

Vamos inicialmente considerar que todos os investimentos possuem algum tipo de risco (não há ativo livre de risco). O investidor racional irá escolher o ponto que maximiza sua utilidade que está na curva de oportunidade de investimento. A figura abaixo ilustra essa situação:

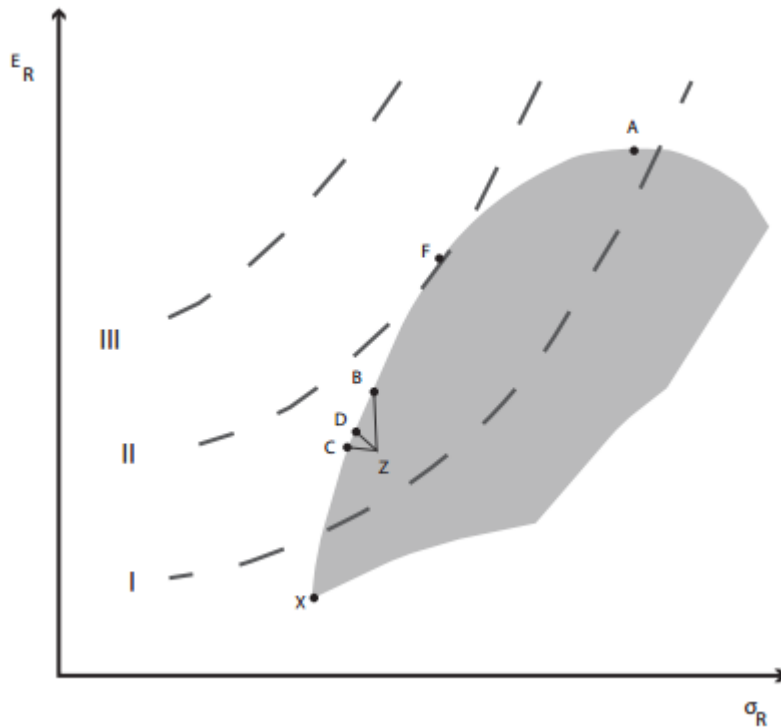


Figura 2:

Fonte: Sharpe (1964) Elaboração Própria

A área sombreada representa a curva de oportunidade de investimento e as linhas tracejadas representam as curvas de indiferença do indivíduo. O investidor deseja alcançar o maior nível de utilidade, ou seja, a curva de indiferença mais à direita possível ao mesmo tempo que existe a restrição imposta pela curva de oportunidade de investimento. É possível notar que qualquer ponto onde a curva de indiferença tangencia a curva AFBDCX é eficiente; não é possível aumentar o retorno esperado sem aumentar o desvio padrão ou não é possível diminuir o desvio-padrão dado o retorno esperado considerado. Na figura acima, podemos ver que o ponto Z é um ponto ineficiente dominado pelos pontos B, D e C, por exemplo.

No exemplo acima também não foi considerada a possibilidade de um ativo livre de risco. No entanto, em situações reais, o investidor se depara com a possibilidade de alocar seu portfólio entre ativos com risco. Vamos então assumir a existência de um ativo livre de risco e supor que o investidor decide alocar  $a$  no ativo livre de risco ( $R_f$ ) e  $1-a$  no ativo

com risco ( $ER_i$ ). O retorno esperado será:  $E_r = aR_f + (1-a)ER_i$ . Como o desvio padrão do ativo livre de risco é zero, a variância do portfólio do investidor será  $(1-a)DP_i$ , onde  $DP_i$  é o desvio padrão do ativo com risco  $i$ . Essas condições implicam que a combinação entre um ativo livre de risco e um ativo com risco deve estar contida em uma linha reta entre os dois componentes. A figura abaixo ilustra essa situação:

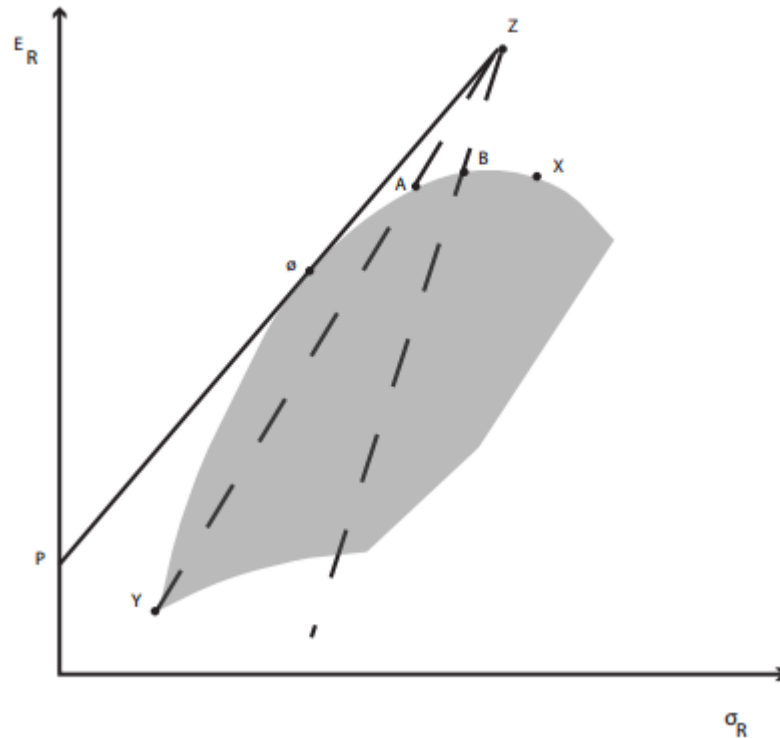


Figura 3:

Fonte: Sharpe (1964) Elaboração Própria

Pode-se mostrar que de todas as combinações de investimentos possíveis, a combinação que pertence a uma reta que passa por  $P$  e  $\phi$  será dominante sob as demais outras. Chamamos de *Capital Market Line* (CML) a reta que passa por  $P$  e tangencia a curva de oportunidade de investimento. No caso em que a taxa de juros para tomar emprestado e para emprestar (*Borrowing e Lending Rate*, respectivamente) forem iguais a curva de oportunidade de investimento irá se tornar a reta  $P\phi Z$ , na figura acima. Estes resultados preliminares do modelo postulam que o investidor, ao maximizar sua utilidade esperada, poderá escolher qualquer combinação de ativos arriscados e livre de risco que estejam contidos na CML. Qualquer combinação que não esteja contida na reta, ou não é factível ou é ineficiente.

Para derivar as condições de equilíbrio no mercado de capitais precisamos assumir algumas hipóteses além das hipóteses assumidas anteriormente em Markowitz (1952, 1959) e Tobin (1958): i) A taxa de juros para emprestar e tomar empréstimo são iguais e todo

investidor tem acesso a essa taxa sem restrição; ii) Expectativas dos investidores são homogêneas (Investidores concordam nos valores esperados, desvio padrão e coeficiente de correlação entre os ativos); iii) Inexistência de custos de transação ou alguma falha de mercado. Sob essas premissas e dada um vetor de preços  $\mathbf{p}$  para os ativos, o equilíbrio pode ser ilustrado na figura abaixo:

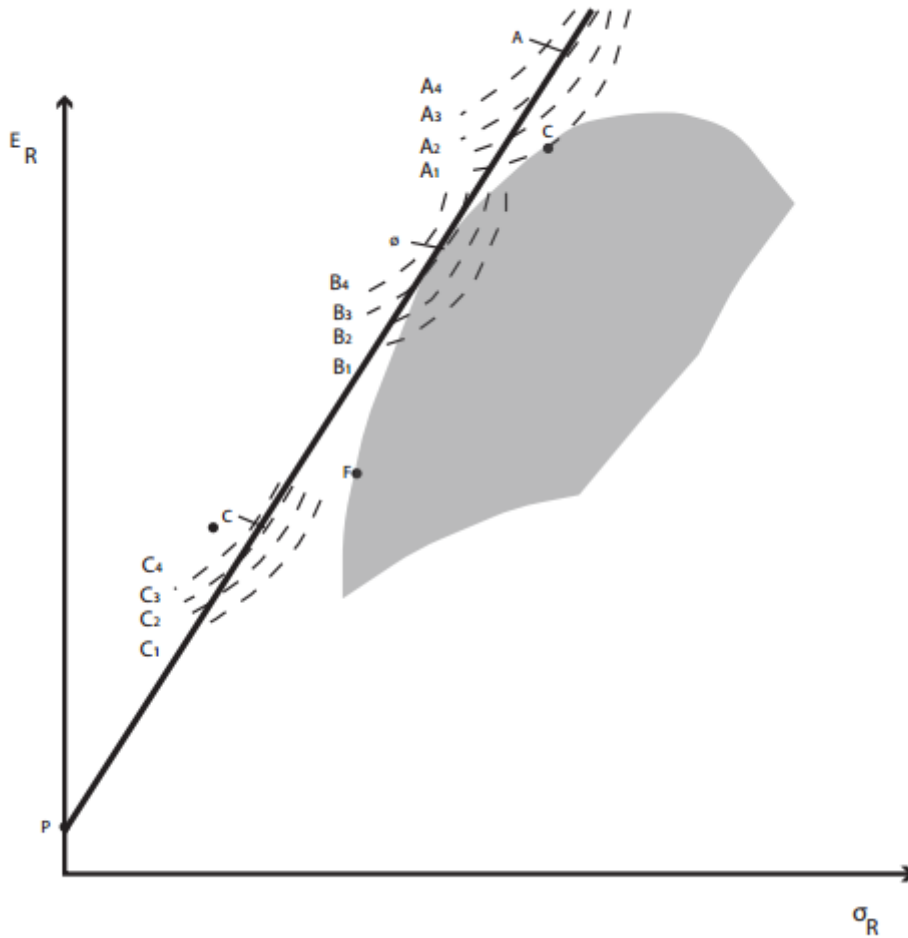


Figura 4:

Fonte: Sharpe (1964) Elaboração Própria

Para o investidor **A** que possui as curvas de indiferença de  $A_1$  a  $A_4$ , o ponto que maximiza sua utilidade é  $A^*$ . Nesse ponto, ele investirá parte de sua riqueza no ativo livre de risco e no ativo com risco. Para o investidor **B**, que possui as curvas de indiferença de  $B_1$  a  $B_4$ , o ponto ótimo será  $\phi$ . Nesse ponto ele investe toda sua riqueza no portfólio contendo o ativo com risco. Para o investidor **C**, que possui as curvas de indiferença de  $C_1$  a  $C_4$ , o ponto ótimo será  $C^*$ . Nesse ponto ele investe toda sua riqueza mais um acréscimo que foi emprestado no ativo com risco.

Com a derivação de um modelo de equilíbrio no mercado de capitais, é possível

explicar a relação entre o retorno de um único ativo e a combinação eficiente de diversos ativos com risco. Anteriormente tínhamos derivado somente a relação entre risco e retorno de um portfólio dito eficiente. Sharpe (1964) propõe encontrar uma fórmula simples que relaciona o retorno esperado a vários elementos em todos os ativos que estão contidos na carteira eficiente. Assim, é possível estimar o retorno de um único ativo ( $R_i$ ) em relação à carteira eficiente.

A dispersão dos retornos do ativo individual ( $R_i$ ) sob sua média é uma evidência do risco total do ativo. No entanto, Sharpe (1964) postulou que parte desta variação do retorno do ativo individual tem uma relação direta com o retorno da carteira eficiente. Essa relação é representada pelo coeficiente de inclinação da reta na figura acima caracterizado por  $B_{ig}$  (beta do ativo  $i$ ). As variações do retorno do ativo individual ( $R_i$ ) são altamente explicadas por variações no retorno da carteira eficiente de mercado. Ambas as variações entre o retorno do ativo individual e o retorno da carteira eficiente estão sujeitas ao chamado risco sistemático (*systematic Risk*). Risco sistemático pode ser interpretado como a parte do risco do ativo individual que não pode ser eliminada por diversificação. Preços irão se ajustar para que ativos mais sensíveis a variação do retorno da carteira de mercado tenham maiores retornos esperados em comparação com aqueles no qual a sensibilidade é menor.

A relação dos retornos entre um único ativo e uma carteira eficiente pode ser explicada pela dependência comum de todos os ativos a variáveis relacionadas à atividade econômica. A diversificação consegue eliminar os riscos específicos de ativos, mas não o risco que afeta todos os ativos em conjunto. Portanto, a única variável relevante para explicar a taxa de retorno esperado é o nível de atividade econômica, já que qualquer outro risco pode ser diversificado.

Pode-se derivar uma outra interpretação para o modelo CAPM. As hipóteses do CAPM implicam que a carteira de mercado deve ser tangente à curva de mínima variância (FAMA E FRENCH, 2004). A condição de mínima variância é:

$$E(R_i) = E(R_{ZM}) + [E(R_M) - E(R_{ZM})]\beta_{iM}, i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

Pela equação do CAPM temos que o retorno do ativo  $i$  é uma função do retorno esperado do ativo que possui o valor do beta igual a zero ( $R_{zm}$ ) (ou seja, não possui correlação com a carteira de mercado) mais a diferença entre o retorno esperado da carteira de mercado ( $E(R_m)$ ) menos o ativo de beta igual a zero ( $R_{zm}$ ). O beta ( $B_{im}$ ) do ativo  $i$  é dado pela covariância do retorno do ativo individual ( $R_i$ ) e o retorno da carteira eficiente ( $R_m$ ) dividido pela variância do retorno da carteira eficiente:

$$\beta_{iM} = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} \quad (3.2)$$

O beta exposto dessa maneira é interpretado com o risco adicional que cada unidade monetária investida no ativo  $i$  contribui para o risco total do portfólio eficiente (FAMA E FRENCH, 2004). No modelo de Sharpe-Lintner o ativo com Beta zero ( $R_{zm}$ ) é considerado como o ativo livre de risco quando a taxa de juros para tomar emprestado e emprestar não possui risco. Logo, a equação do CAPM de Sharpe-Lintner toma a seguinte forma:

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f]\beta_{im} \quad (3.3)$$

Utilizando as conclusões dos trabalhos de Markowitz (1952, 1959) e Tobin (1958), Sharpe e Lintner desenvolveram a teoria que revolucionou a análise de como os ativos são precificados. Investidores, ao maximizarem sua utilidade esperada, possuem um portfólio que contém um ativo livre de risco e uma carteira eficiente de mercado. A partir disso, Sharpe postulou que o único risco que deve influenciar o preço de um ativo financeiro é o que não é possível eliminar com a diversificação, chamado risco sistemático. Surgiu então a ideia que o determinante do preço do risco de um ativo deve ter uma relação direta com o risco da carteira de mercado. A hipótese de que a variação dos retornos esperados de determinado ativo era relacionada diretamente com o risco da carteira de mercado fez surgir o conceito do beta ( $B_{im}$ ); um dos conceitos mais importantes na literatura de teoria de finanças modernas.

## 3.2 Adaptações no Modelo Sharpe-Lintner

O modelo de Sharpe-Lintner é baseado em premissas restritivas. Vários artigos foram publicados na tentativa de testar o modelo relaxando algumas das hipóteses assumidas. Brennan (1970) encontrou que a estrutura original do CAPM podia ser mantida mesmo incluindo impostos no modelo de equilíbrio. Mayers (1972) criticou a inclusão de somente ativos financeiros. No modelo exposto pelo autor, foi incluída também, por exemplo, capital humano como variável de investimento. As opções de inclusão de ativos internacionais no portfólio do investidor também foram incluídas nos modelos de Solnik (1974) e Black (1974). Embora todos esses autores tenham contribuído para a literatura, iremos enfatizar nesse trabalho as mudanças propostas por Black (1972).

Black (1972) criou um modelo onde é relaxada a hipótese de que é possível emprestar e tomar emprestado qualquer quantidade de capital a uma taxa livre de risco. A versão proposta pelo autor é também conhecida como modelo de zero-beta (DIMSON; MUSSAVIAN, 1999). São duas situações que Black considera em seu artigo: i) é assumido que não existe um ativo livre de risco e que não é possível emprestar nem tomar emprestado capital a uma taxa livre de retorno; ii) existe um ativo livre de risco, posições compradas nesse ativo livre de risco são permitidas enquanto posições vendidas nesse



ativo não são permitidas (BLACK, 1972). Nos dois casos é demonstrado que o retorno esperado de qualquer ativo com risco e o beta possuem uma relação linear. O investidor no modelo de Black divide seus investimentos entre a carteira eficiente de mercado e a e outro portfólio arriscado mas com covariância igual a zero em relação ao mercado (FAMA. FRENCH, 2004). No geral, o modelo de Black é menos restritivo.

### 3.3 Teste Empíricos do Modelo

Na segunda metade do século XX foram realizadas diversas pesquisas testando a validade prática da teoria do CAPM. Podemos resumir os objetivos dos testes realizados em três características desejáveis para validarmos o modelo (Fama and French, 2004): i) retornos esperados são linearmente relacionados com seus respectivos betas e nenhuma outra variável é significativa para explicar os retornos, ii) o prêmio pelo risco, dado pela diferença dos retornos dos ativos arriscados e o retorno dos ativos sem correlação com a carteira de mercado, é positivo e iii) no modelo de Sharpe-Lintner os ativos que não são correlacionados com o mercado possuem retorno igual à taxa livre de risco.

Jensen (1968) foi o primeiro autor a realizar um estudo empírico utilizando séries temporais para testar a validade do modelo de Sharpe-Lintner (FAMA E FRENCH, 2004). Em seu estudo, o autor propôs estudar o desempenho de 115 fundos de investimentos nos EUA durante o período de 1945 a 1964 utilizando o modelo CAPM para explicar o excesso dos retornos. A premissa utilizada foi que a média dos retornos em excesso do ativo  $i$  devem ser explicadas pela média dos retornos em excesso da carteira de mercado. A regressão feita pelo autor foi:

$$(R_{it} - R_{ft}) = a_i + \beta_{im}(R_{mt} - R_{ft}) + e_{it} \quad (3.4)$$

Para o modelo CAPM ser válido, era esperado que o valor de  $a$  não poderia ser estatisticamente diferente de zero. Caso  $a$  tivesse um valor que fosse zero, isso implicaria que gestores poderiam ter ganhos ou perdas diferentes daquele anunciado pelo CAPM. O autor encontrou que, para o período analisado, o valor de  $a$  é na média igual a -0,011 (-1,1%). Isso indica que para o período analisado os gestores tiveram desempenho abaixo do que o modelo de Sharpe-Lintner prediz. Custos de transação e custos administrativos podem ser um dos motivos para que o valor negativo estimado para a amostra tenham tido um desempenho abaixo do predito pelo modelo. Outro resultado foi que o valor do beta é uma boa variável para explicar os excessos de retorno do ativo  $i$  comprovando a importância do beta no modelo de Sharpe-Lintner para explicar retornos do ativo. Jensen (1968) conclui que na média os fundos não foram bem sucedidos em terem desempenhos acima do esperado a ponto de justificarem as taxas de administração e corretagem cobradas.

Os trabalhos de Black, Jensen e Scholes (1972) e Fama e MacBeth (1973) propuseram uma nova metodologia empírica para testar o CAPM conhecida como método dos dois estágios (*two-pass methodology*). Grande parte dos trabalhos empíricos subsequentes são baseados nas hipóteses e procedimentos destes autores (DIMSON; MUSSAVIAN, 1999). Black, Jensen e Scholes (1972) primeiramente realizam uma regressão de série temporal dos retornos dos portfólios sob alguma proxy de retorno de mercado. Estimados os betas de mercado, esses portfólios são agrupados em ordem decrescente em diferentes grupos baseados em seus respectivos betas. O segundo passo da metodologia consiste em uma regressão em *cross-section* das médias dos retornos sob os betas estimados na primeira etapa (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999). Os autores analisaram o mercado acionário americano entre o período de 1926 e 1966 formando 10 combinações diferentes de portfólio. Os resultados encontrados indicaram que ativos com altos valores de beta tem interceptos estatística e negativamente significantes e ativos com baixos valores de beta possuem interceptos positivamente significantes (BLACK, JENSEN E SCHOLES, 1972). A relação entre o excesso de retorno médio do portfólio  $j$  e beta é positiva e linear embora a inclinação do Beta mude dependendo do subperíodo analisado. No geral, o fato de o intercepto não ser estatisticamente diferente de zero implica que para os dados analisados a forma tradicional do modelo Sharpe-Lintner não pode ser aceita, embora o fato de o beta ser positivo e linearmente relacionado com o retorno do portfólio esteja em concordância com o modelo de zero-beta proposto por Black (1972).

Fama e Macbeth (1973) também usam a metodologia em dois estágios. Os autores, no entanto, fazem uma modificação no segundo estágio do procedimento. Ao invés de apenas uma regressão em *cross-section* das médias dos retornos mensais sobre os betas, os retornos são regredidos mês a mês, de forma que em cada mês obtenha-se um intercepto e um beta. São analisadas as implicações do CAPM para diferentes combinações de portfólio no mercado americano (NYSE) entre 1934 e 1962. Os autores encontram uma relação positiva e linear entre a média dos retornos e o beta. Embora exista uma relação positiva e linear entre beta e retorno, comprovando a significância do beta para explicar retornos e validando o modelo de Black para o CAPM, o fato de o intercepto não ser igual ao retorno do ativo livre de risco implica que não podemos assumir que o modelo de Sharpe-Lintner é válido. Outro resultado encontrado foi que a proxy usada para a carteira eficiente de mercado (índice SP 500) está na fronteira de mínima variância e, conseqüentemente, pode ser uma boa proxy para a carteira de mercado. Os resultados de Miller e Scholes (1972), Blume e Friend (1973), Gibbons (1982), Stambaugh (1982) também corroboram os resultados encontrados por Fama e Macbeth (1973).

Roll (1977) produz uma crítica ainda mais forte do que a falha empírica do modelo constatado por estudos anteriores. O autor argumenta que no fundo o CAPM nunca foi verdadeiramente testado. A existência de um portfólio de mercado, ponto central da teoria, é teórica e empiricamente falha, segundo Roll (1977). Não é claro que tipos de ativos como,

por exemplo, capital humano, devam ser excluídos do portfólio de mercado sem perdas para o modelo. Os testes realizados até então, utilizando comumente ações negociadas em bolsa de valores como proxy do portfólio de mercado, somente testaram se esta proxy está na fronteira de mínima-variância. Logo, Roll (1977) argumenta que nada pode ser inferido sobre o CAPM (FAMA e FRENCH, 2004). Fama e French (2004) contrariam a crítica de Roll (1977) argumentando que basta encontrar uma proxy que esteja na fronteira de mínima-variância para ser testar a diferença entre retornos esperados. Stambaugh (1982), por exemplo, acrescenta em sua proxy de carteira de mercado títulos de governo, ações preferenciais, imóveis e bens de consumo durável. Os resultados encontrados indicam que o CAPM não é sensível ao expandir os tipos de ativo da carteira de mercado.

Testes foram conduzidos para o caso do mercado brasileiro. Os resultados encontrados pelos autores, no geral, apontam para a rejeição do modelo Shape-Lintner. Bruno (1998) e Rostagno e Soares (2005) apontam para a rejeição do CAPM embora tenham encontrado que existe uma relação linear entre o retorno dos ativos e índices de valor. Yoshino e Santos (2009) também rejeitam a hipótese do CAPM e encontram que existe uma relação entre retorno e tamanho da empresa.

Novos trabalhos foram surgindo expondo a fragilidade do beta de mercado como variável para explicar retornos esperados. Índices de valor, amplamente utilizados pelo mercado financeiro, começaram a ser testados e novas evidências surgiam apontando variáveis que afetam o retorno esperado de ativos financeiros. Trabalhos como os de Basu (1977), Stattman (1980), Banz (1981) e Bhandari (1988) foram pioneiros em contestar duramente os resultados do CAPM. Basu (1977) evidenciou que quando ações são escolhidas baseando-se em índices como E/P (*Earnings-Price Ratio*) os retornos podem ser maiores, no caso em que E/P é alto, ou menores, no caso em que E/P é baixo em relação com o que o CAPM prevê. Banz (1981) observou que existem efeitos no tamanho de capitalização nos retornos. Empresas pequenas, por exemplo, tendem a ter retornos maiores do que o esperado utilizando o CAPM em relação a empresas grandes. Bhandari (1988) encontrou que empresas com alto índice de alavancagem possuem retornos em excesso em relação ao que o CAPM prediz. Stattman (1980) e Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) encontraram que retornos são também relacionados com a razão valor contábil e o valor da ação (*book-to-market equity*).

Fama e French (1992) realizaram um estudo aprofundado sobre a relação desses índices financeiros nos retornos dos ativos. Os autores encontraram que a relação entre o beta e o retorno esperado do ativo não se mantém ao analisar o período compreendido entre 1963 e 1990. Ao invés da relação linear e única entre retorno e beta, evidências apontadas por Basu (1977), Banz (1981) e Bhandari (1988) foram confirmadas por Fama e French (1992) demonstrando que existem, de fato, outras variáveis que explicam o retorno esperado de um ativo. Algumas das variáveis encontradas que afetam o retorno

são: tamanho da empresa medido pela capitalização de mercado, alavancagem financeira, relação lucro/preço (*E/P ratio*) e relação entre valor contábil e valor da ação da empresa (*book-to-market equity* ou BE/ME). Como explicação para este resultado, os autores sugerem que podem existir variáveis econômicas que estejam relacionadas ao tamanho da empresa e ao índice de valor contábil e, portanto, precificadas nessas variáveis, que o beta de mercado como única variável falha em capturar. Chan, Chen e Hsieh (1985) defendem que o tamanho das empresas pode afetar o retorno esperado. De acordo com os autores, podem existir relações mais fundamentais entre retorno esperado e fatores de risco associados ao tamanho da empresa. Os autores realizaram uma comparação entre ativos de empresas com classificação de inadimplência alta e empresas com classificação de inadimplência baixa e constataram que o tamanho da empresa pode esconder alguma medida de risco de inadimplência.

Existem três possíveis explicações para a rejeição empírica do CAPM. A primeira está relacionada a *Data Dredging*: processo no qual pesquisadores escolhem dados amostrais a fim de identificar padrões e estabelecer relações entre variáveis. No entanto, estudos realizados com outras amostras de dados contrariam a hipótese de *Data Dredging* como Chan, Hamao e Lakonishok (1991) realizando um estudo para o mercado acionário japonês, Capaul, Rowley e Sharpe (1993) para o mercado acionário europeu e Fama e French (1998) para 12 mercados distintos constataram a não aceitação do CAPM assim como nos estudos anteriores. A segunda explicação é defendida por economistas com viés comportamental. Para esse grupo, o investidor que escolhe ações baseado em índices de valor está exposto a reações irracionais do mercado (FAMA; FRENCH, 2004). Logo, pelo critério de escolha estar exposto a possíveis irracionalidades do mercado, o modelo CAPM, usado por investidores racionais, irá refletir resultados diferentes da realidade. DeBondt e Thaler (1987), Lakonishok, Shleifer e Vishny (1994) e Haugen (1995) são defensores desta explicação. Por último, existe a possibilidade de o CAPM ser uma teoria demasiadamente simples e, portanto, ser necessário um modelo mais sofisticado. É possível que o investidor não se importe apenas com o retorno esperado e variância de um portfólio mas sim com outras variáveis relacionadas a consumo, salários e outras oportunidades de investimento. O ICAPM desenvolvido por Merton (1973) surge como uma possível solução a essa crítica.

Embora invalidado empiricamente, o modelo Sharpe-Lintner foi um marco para a teoria de finanças modernas. Os diversos estudos realizados para testar a validade do modelo constataram que ele não se sustentou ao teste empírico. Nos primeiros testes, foi comprovado somente a validade do modelo de Black (1972) onde ao se relaxar a hipótese da existência de tomar emprestado e emprestar à taxa livre de risco bastava para validar a relação linear e positiva entre o retorno do ativo e o beta. Os artigos de Black, Jensen e Scholes (1972) e Fama e MacBeth (1973) foram os primeiros a testarem e comprovarem a validade do modelo de Black. Com o passar do tempo, novos estudos foram realizados e apontaram que a relação linear e positiva entre beta e retorno esperado não era

válida empiricamente (Lakonishok e Shapiro, 1986). Além da inexistência dessa relação, a inclusão de novas variáveis como tamanho e alavancagem financeira, por exemplo, nos estudos de Basu (1977), Banz (1981) e Bhandari (1988), mostrou ser importante para explicar os retornos esperados dos ativos. Esse resultado contestou ainda mais a aceitação do CAPM, que defendia que somente o retorno esperado de mercado explicava os retornos esperados dos ativos. Por fim, o trabalho de Fama (1992) foi o desfecho final para invalidar de vez a aplicação empírica do CAPM onde foi se demonstrado a existência de outras variáveis que afetam os retornos esperados dos ativos que não sejam o beta de mercado.



## 4 *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (ICAPM)

O modelo Black-Shape-Lintner sucumbiu perante diversos testes empíricos realizados durante os anos seguintes a sua publicação. Entre as possíveis causas, podem existir problemas estatísticos na estimação do modelo ou na escolha de uma *proxy* correta para a carteira eficiente de mercado. Outro problema do CAPM pode estar na concepção de suas hipóteses. O fato de o investidor somente analisar a média e a variância de um determinado investimento pode não ser adequado para descrever o processo de seleção de ativos. Podem existir outras variáveis relacionadas a, por exemplo, consumo e salários que o agente leva em consideração no momento de alocação de investimento. Falhas no CAPM não estão restritas somente a possíveis variáveis significantes que o modelo deixa de incluir; o escopo temporal também não parece refletir o comportamento do investidor. No CAPM, o agente está analisando somente sua riqueza no final do período considerado. Como explicar a mudança diária de preços observadas constantemente no mercado? O modelo CAPM não responde essa questão (DIMSON; MUSSAVIAN, 1999). Considerando essas questões, Merton (1973) desenvolve um modelo de equilíbrio de ativos financeiros assumindo que o tempo é uma variável contínua e que existam múltiplos betas que afetam o retorno dos ativos. O modelo de Merton ficou conhecido como *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* ou ICAPM.

Merton (1973) não descarta a validade do CAPM; apenas postula que a relação de equilíbrio para o retorno esperado obtida no modelo original do CAPM somente é mantida no ICAPM caso algumas premissas específicas sejam mantidas. Logo, no geral, o comportamento do investidor que admite tempo contínuo ao escolher seu portfólio será significativamente diferente daquele que considera apenas um período no tempo (tempo discreto). No modelo ICAPM, o investidor considera a relação dos retornos esperados no período corrente com os retornos esperados que estarão disponíveis no futuro (Merton, 1973).

A demanda por ativos de acordo com o modelo ICAPM pode ser interpretada como função de duas variáveis. A primeira variável é a demanda de um ativo semelhante ao modelo de tempo discreto de maximização de média-variância. Essa variável mede o coeficiente de aversão ao risco do investidor em relação ao risco sistemático. A segunda variável reflete a demanda por um ativo para se proteger de eventuais mudanças indesejáveis na curva de oportunidade de investimento. Uma mudança indesejável na curva de oportunidade de investimento ( $X_k$ ) é definida como uma mudança na qual o consumo futuro ( $C$ ) irá se reduzir dado um nível de riqueza futura ( $\partial C / \partial X_k < 0$ ). Pelo modelo,

pode ser mostrado que investidores avessos ao risco irão demandar ativos que protejam essas diminuições no consumo. Essa estratégia de *hedge* reflete uma tentativa de minimizar uma variação não antecipada do consumo no tempo. Essa minimização implica um tipo de “suavização” do consumo (Merton, 1973). Se, por um acaso, a curva de oportunidade de investimento for estática, o resultado do modelo ICAPM se torna idêntico ao CAPM.

Em equilíbrio no modelo ICAPM, investidores são compensados em termos de retorno esperado por suportar o risco sistemático do mercado e o risco de mudanças não desejáveis na curva de oportunidade de investimento. Portanto, ao escolher um portfólio, os investidores consideram como sua riqueza futura irá mudar com variáveis importantes como renda do trabalho, nível de preços e novas oportunidades de investimento, por exemplo (FAMA e FRENCH, 2004). Como resultado, o modelo propõe que um investidor que se depara atualmente com uma taxa de juros de 5% e uma possível alteração dessa taxa no futuro para 2% ou 10% irá demandar portfólios diferentes daquele obtido por um investidor que constrói seu portfólio baseando-se somente em um período (Merton, 1973). Um importante resultado do ICAPM é a existência de múltiplos fatores de risco que explicam os retornos dos ativos, representado por diversos betas, e não somente por um único fator para o risco sistemático (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999).



## 5 Consumption Capital Asset Pricing Model (CCAPM)

Breeden (1979) estende o modelo intertemporal com múltiplos betas proposto por Merton (1973). O modelo ICAPM propõe que o número de betas seja igual a um mais o número de fatores relevantes necessários para explicar mudanças na curva de oportunidade de investimento. Como essas variáveis não são facilmente identificáveis, a extensão intertemporal do CAPM, embora muito importante teoricamente, carece de fundamentos para ser validada empiricamente. Isso faz com que o modelo seja insuficiente para explicar as decisões de alocação de portfólios entre investidores. Breeden (1979) propõe um modelo, a partir dos resultados de Merton (1973), no qual os múltiplos betas são transformados em um único beta que representa a relação entre o excesso do retorno de um ativo em relação ao consumo agregado. O fato de o modelo envolver um único beta relacionado a uma variável específica, ao invés de vários betas relacionados a diversas variáveis, torna o modelo de Breeden (1979), chamado *Consumption Capital Asset Pricing Model* (CCAPM), mais fácil de ser testado e implementado.

Seguindo a desenvolvimento realizado por Cochrane (2005) e Ludvigson (2013) iremos supor, para efeitos de simplificação, que a economia é composta por um único agente. A utilidade do agente depende do consumo corrente ( $c_t$ ) e do consumo futuro ( $c_{t+1}$ ). Assumimos que essa utilidade é separável:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \quad (5.1)$$

O agente vai escolher a quantidade entre consumo corrente e consumo futuro de forma a maximizar sua utilidade. Além disso, existem duas restrições a essa maximização: i) o agente irá dividir sua renda corrente entre consumo corrente ou investimento em  $n$  ativos diferentes e ii) no período seguinte o agente irá consumir a renda derivada dos investimentos feitos e da renda disponível no segundo período. Nosso problema de maximização pode ser simplificado como:

$$\begin{aligned} \max(s_t^i)_{i=1}^n u(c_t) + E_t[\beta u(c_{t+1})] \quad s.a. \\ c_t = e_t - \sum_{i=1}^n p_t^i s_t^i \\ c_{t+1} = e_{t+1} + \sum_{i=1}^n x_{t+1}^i s_t^i \end{aligned} \quad (5.2)$$

Onde,  $C_t$  é o consumo no período  $t$ ,  $\beta$  é o fator de desconto subjetivo do agente,  $e_t$  é a renda no período  $t$ ,  $e_{t+1}$  é a renda no período  $t + 1$ ,  $p_t^i$  é o preço do ativo  $i$  no período  $t$ ,  $s_t^i$  é a quantidade do ativo  $i$  que o agente mantém em seu portfólio e  $x_t^i$  é o *payoff* do ativo  $i$  no período  $t$ . Logo,  $x_{t+1}^i = p_{t+1} + d_{t+1}$ .

Substituindo as restrições no modelo, encontramos a segunda CPO:

$$p_t^i u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}^i] \quad (5.3)$$

Rearranjando os termos da equação, podemos reescrevê-la como:

$$p_t^i = E_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}^i] \quad (5.4)$$

A equação (5.3) descreve a decisão de consumo intertemporal ao decidir se ele deve ou não comprar uma unidade a mais de um ativo financeiro. O termo do lado esquerdo,  $p_t^i u'(c_t)$ , expressa a perda de utilidade decorrente da compra de uma unidade do ativo e o termo do lado direito,  $E[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}^i]$ , é o ganho na utilidade esperada, sendo descontado, gerado com o ativo em  $t + 1$ . Logo, investidores compram ou vendem ativos financeiros até que a perda marginal presente se iguale ao ganho marginal de se investir futuro. A equação (5.4) postula uma relação entre preços e preferências dos investidores.

Definimos o Fator de Desconto Estocástico ou Taxa Marginal de Substituição Intertemporal como:

$$m_{t+1} := \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \quad (5.5)$$

Podemos então reescrever a equação que relaciona preço e preferência do agente, descrita acima, como:

$$p_t^i = E_t(m_{t+1} x_{t+1}^i) \quad (5.6)$$

Se definimos o retorno bruto do ativo  $i$ ,  $R_{t+1}^i$ , como:

$$R_{t+1}^i := \frac{x_{t+1}^i}{p_t} \quad (5.7)$$

Podemos reescrever (5.6) para ser expressa em termos de retorno:

$$1 = E(m_{t+1} R_{t+1}^i) \quad (5.8)$$

Se considerarmos a existência de um ativo livre de risco que possui um retorno constante,  $R^f$ , obtemos da equação (5.8) que:

$$R^f = \frac{1}{E(m_{t+1})} \quad (5.9)$$

Ao aplicar na equação (5.7) a propriedade  $E(xy) = E(x)E(y) + cov(x, y)$  e dividindo ambos os lados por  $1/E(m_{t+1})$ , obtemos:

$$E(R)_{t+1}^i = R_{t+1}^f + \frac{cov(m_{t+1}, R_{t+1}^i) - var(m_{t+1})}{var(m_{t+1})} \frac{1}{E(m_{t+1})} \quad (5.10)$$

Que também pode ser escrita em termos do beta:

$$E(R_{t+1}^i) = R_{t+1}^f + \beta_{1,m} \lambda_m \quad (5.11)$$

em que  $\beta_{i,m}$  é o coeficiente de regressão do retorno  $R_i$  sob o fator de desconto Estocástico que pode ser interpretado como a quantidade de risco associado a cada ativo. Já  $\lambda_m$  é o preço do risco.

Como resultado do modelo CCAPM temos que, quando o retorno de um ativo possui covariância positiva com o consumo futuro, esse mesmo ativo será negativamente correlacionado com a utilidade marginal do consumo futuro. Isso quer dizer que, se o investidor comprar um ativo que possui covariância positiva com o consumo futuro, isto é, possui retorno positivo quando o indivíduo possui alta riqueza e retorno negativo quando o indivíduo possui baixa riqueza, seu consumo será mais volátil. Da mesma forma, se o investidor comprar um ativo que possui covariância negativa com o consumo futuro, seu consumo será suavizado e terá menor volatilidade. Assim, ativos que possuem covariância positiva com consumo tornam o consumo futuro mais volátil fazendo com que o preço desses sejam menores para induzir a compra pelo investidor. Ativos negativamente correlacionados com o consumo futuro, como seguros, podem ter altos preços oferecendo taxas de retorno inferiores à taxa livre de risco ou até mesmo retornos negativos.

O modelo CCAPM soluciona alguns dos problemas teóricos encontrados no modelo CAPM tradicional. Ao preservar a simplicidade do CAPM, com seus conceitos de risco sistemático medidos pela covariância do retorno da carteira de mercado com o retorno do ativo, o CCAPM sugere que uma melhor medida para risco sistemático é a covariância do retorno do ativo com o consumo agregado. Assim, o modelo CCAPM rebate as críticas apontadas por Merton (1973) e Roll (1977) (LETTAU, M e LUDVIGSON, S; 2001).

## 5.1 Testes Empíricos do CCAPM

Hansen e Singleton (1992) testam o CCAPM para o mercado de ações americano utilizando o modelo de agente representativo com função de utilidade separável no tempo. Os autores rejeitam o modelo CCAPM para explicar excesso de retornos, argumentando

que existem restrições muito fortes para o modelo ser válido empiricamente. Mankiw e Shapiro (1986) estudam a validade empírica do CCAPM utilizando uma regressão em *cross-section* para explicar os excessos de retorno de ações. Os autores propõem responder duas perguntas: i) ações que possuem altos betas de consumo produzem maiores retorno? ii) os betas de consumo são mais eficientes do que os betas convencionais para explicar retornos dos ativos? Mankiw e Shapiro (1996) constataam que não existem indicações que o CCAPM é melhor que o modelo tradicional do CAPM e não encontram evidências empíricas da relação entre consumo e retorno.

Embora o CCAPM seja mais robusto teoricamente, a falha em comprovação empírica faz com que ele não seja preferível à sua versão original. Como possíveis explicações para a não validação empírica do CCAPM, autores argumentam que choques nas preferências dos agentes são importantes fatores na determinação do consumo. É também argumentado que consumidores não participam ativamente do mercado de ações fazendo com que o modelo tenha baixo poder explicativo. Breeden, Gibbons e Litzenberger (1989) e Cochrane (1996) corroboram os resultados de Mankiw e Shapiro (1986) demonstrando que o modelo tradicional do CAPM possui superioridade empírica.

## 6 Arbitrage Pricing Theory (APT)

Ross (1976) desenvolveu um novo modelo de precificação de ativos motivado pelas supostas falhas que o CAPM apresentava. Enquanto no CAPM havia somente a existência de um único fator de risco relevante para explicar os retornos dos ativos, medido pela covariância entre o retorno de um determinado ativo e a carteira eficiente de mercado, no modelo APT são incluídos outros fatores de risco inerentes aos ativos. Logo, o modelo APT permite que diversos fatores afetem os preços dos ativos ao invés de uma única variável como exposto pelo CAPM. Outra diferença é a forma como os modelos são formalizados. Diferentemente do CAPM, que é um modelo de equilíbrio geral, o APT é derivado a partir de modelos estatísticos baseando-se na não possibilidade de arbitragem. Ross (1976) argumenta que, se os preços encontrados no equilíbrio não oferecem possibilidade de arbitragem, pode-se assumir que os retornos esperados terão uma relação linear com os diversos fatores de risco (HUBERMAN, 2005). Portanto, se não há a possibilidade de arbitragem, podemos precificar determinado ativo relativamente a outros ativos com base em relações de variáveis comuns.

O modelo APT também possui hipóteses menos rigorosas em relação ao CAPM. Primeiramente, hipóteses acerca do comportamento do investidor são menos restritivas. No modelo CAPM é assumido que o investidor maximiza sua utilidade baseando-se no modelo de média-variância ao passo que, no APT, apenas é necessário assumir as hipóteses de concavidade e monotocidade em sua função de utilidade. Além disso, o APT pode ser usado para múltiplos períodos enquanto o CAPM é limitado a um período único. Por último, um dos principais pontos para o modelo CAPM ser válido é a existência de um portfólio eficiente. Para o modelo APT, o portfólio eficiente não tem relevância (ROLL e ROSS, 1980).

A partir destas hipóteses, o ponto inicial da derivação do modelo APT é capturar os retornos aleatórios em cada período para cada ativo usando uma equação geradora de retornos (return Generating Equation). Em um mercado com  $n$  ativos, o retorno aleatório,  $R_i$ , é dependente linearmente de  $K$  fatores econômicos comuns. Para efeitos de simplificação, vamos assumir que  $K = 3$ . A equação geradora de retorno (EGR) do ativo  $i$  pode ser descrita como:

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + b_{i3}F_3 + e_i \quad (6.1)$$

$F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são os efeitos dos fatores subtrídos da média dos mesmos:

$$F_1 = F_1 - E(F_1) \quad (6.2)$$

$$F_2 = F_2 - E(F_2) \quad (6.3)$$

$$F_3 = F_3 - E(F_3) \quad (6.4)$$

Onde  $E$  é o operador de esperança da variável.  $E(F_1)$ ,  $E(F_2)$  e  $E(F_3)$  possuem valor igual a zero. Os coeficientes restantes,  $b_{i1}$ ,  $b_{i2}$  e  $b_{i3}$  são responsáveis em capturar a sensibilidade do retorno aleatório do ativo  $i$  em relação aos fatores individuais, que também são variáveis aleatórias.  $e_i$  possui valor esperado igual a zero e é caracterizado como parte do retorno que os fatores não são capazes de captar. Tirando o valor esperado dos dois lados da equação, podemos reescrevê-la como:

$$E(R_i) = a_i + b_{i1}E(F_1) + b_{i2}E(F_2) + b_{i3}E(F_3) + e_i \quad (6.5)$$

Pelas propriedades mencionadas acima, cada termo do lado direito da equação, com exceção do intercepto terá valor esperado igual a zero. Isso nos leva a

$$E(R_i) = a_i \quad (6.6)$$

Iremos denotar, chamar  $a_i$  por  $\mu_i$ . A EGR para cada ativo  $i$  se torna então:

$$R_i = \mu_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + b_{i3}F_3 + e_i \quad (6.7)$$

Vamos supor que  $w_i$  represente o montante investido em determinado ativo  $i$ . Se  $w_i$  for positivo, o investidor está alocando parte de sua riqueza em  $i$ . Se  $w_i$  for negativo, o investidor está vendendo a descoberto o ativo  $i$ . Assumindo um investimento que se auto financie (*Self-Financed Investment*), deve valer que:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 0 \quad (6.8)$$

Para cada combinação de valores de  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ , o valor do retorno esperado do portfólio pode ser expresso como

$$\sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (6.9)$$

Dada a equação (6.9), podemos reescrever a equação (6.7) em termos do valor aleatório do investimento no final do período como:

$$\sum_{i=1}^n w_i R_i = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + \left( \sum_{i=1}^n w_i b_{i1} \right) F_1 + \left( \sum_{i=1}^n w_i b_{i2} \right) F_2 + \left( \sum_{i=1}^n w_i b_{i3} \right) F_3 + \sum_{i=1}^n w_i e_i \quad (6.10)$$

Em adio a condio (6.8), podemos impor mais três condies acerca dos valores de  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ . São elas:

$$\sum_{i=1}^n w_i b_{i1} = 0, \quad (6.11)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i b_{i2} = 0, \quad (6.12)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i b_{i3} = 0 \quad (6.13)$$

As condies (6.11), (6.12) e (6.13) implicam que o valor aleatório do investimento não será afetado pelos fatores  $F_1, F_2$  e  $F_3$ . Como estas variáveis não afetam o valor esperado do investimento, não  necessário fazer nenhuma hipótese adicional acerca da distribuio de probabilidade. As equaes (6.8), (6.11) – (6.13) representam quatro equaes lineares com  $n$  variáveis. Se  $n > 5$  podemos provar que irão existir infinitas formas de escolher  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  para os  $n$  ativos que satisfazem as restries. Impondo as novas restries (6.11) – (6.13), a equao (6.10) se transforma em:

$$\sum_{i=1}^n w_i R_i = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i + \sum_{i=1}^n w_i e_i \quad (6.14)$$

Como  $w_i$  não  uma variável aleatória, temos que o segundo termo do lado direito da equao (6.14) possui valor esperado igual a zero. Pela lei dos grandes números, podemos inferir também que o segundo termo será muito pequeno, tendo termos positivos e negativos que na média tendem a ser cancelados. Podemos, portanto, representar (6.14) como:

$$\sum_{i=1}^n w_i R_i = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \quad (6.15)$$

Uma implicao da equao (6.15)  a não existência de aleatoriedade. Em um mercado onde não existe a possibilidade de obter ganhos a partir de estratégias de arbitragem, um investimento autofinanciado sem nenhum risco deve ter um retorno igual a zero. Essa hipótese pode ser analiticamente representada como:

$$\sum_{i=1}^n w_i \mu_i = 0 \quad (6.16)$$

Para cada conjunto de valores  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  factíveis, existem diversos conjuntos de  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  que satisfazem (6.16). No entanto, para estabelecer uma relação de preço significativa, os valores de  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  devem ser únicos. Essa solução, portanto, deve ser independente de como  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$  são determinados. Temos de encontrar alguma relação linear que possa explicar  $\mu_i$ . Podemos assumir que também existe uma relação entre  $\mu_i$  e fatores comuns a todos os ativos  $b_{i1}, b_{i2}$  e  $b_{i3}$ :

$$\mu_i = \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \lambda_3 b_{i3} \quad (6.17)$$

Onde  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os fatores comuns que afetam  $\mu_i$ . Não podemos deixar esses parâmetros sem especificação. Algebricamente, como existem quatro fatores para determinar, é preciso quatro variáveis relevantes. Inicialmente, o parâmetro mais simples de ser encontrado é  $\lambda_0$ . Se utilizarmos a equação (6.17) e aplicarmos para o caso de um ativo livre de risco  $f$ , (6.17) se torna:

$$\mu_f = \lambda_0 + \lambda_1 b_{f1} + \lambda_2 b_{f2} + \lambda_3 b_{f3} \quad (6.18)$$

Como o ativo livre de risco  $f$  não é influenciado por fatores comuns, devemos assumir que  $b_{f1} = b_{f2} = b_{f3} = 0$  e, conseqüentemente,  $\lambda_0 = r_f$ . Para determinar  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  é necessário que os retornos esperados de três portfólios específicos sejam conhecidos. Para isso, vamos construir um portfólio usando os mesmos ativos disponíveis no mercado. Chamaremos esse portfólio de *portfólio 1*. O *portfólio 1* não é autofinanciável; são necessários fundos disponíveis para se investir. Além disso, espera-se que esse portfólio tenha uma correlação perfeita para o fator econômico  $F_1$  e ausência de correlação para os demais fatores. Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  as proporções dos ativos 1, 2, ...,  $n$  no portfólio satisfazendo a seguinte condição:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (6.19)$$

O retorno aleatório do portfólio,  $R_{\underline{1}}$ , será:

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i = 1 \quad (6.20)$$

Ao combinar a equação (6.20) com a equação (6.1), obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\underline{1}} &= \sum_{i=1}^n x_i (\mu_i + b_{i1} F_1 + b_{i2} F_2 + b_{i3} F_3 + e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mu_i + \left( \sum_{i=1}^n x_i b_{i1} F_1 + \sum_{i=1}^n x_i b_{i2} F_2 + \sum_{i=1}^n x_i b_{i3} F_3 + \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$



Sob as seguintes condições adicionais

$$\sum_{i=1}^n x_i b_{i1} = 1 \quad (6.22)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i b_{i2} = 0 \quad (6.23)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i b_{i3} = 0 \quad (6.24)$$

A equação (6.21) acaba se reduzindo a:

$$R_{\underline{1}} = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i + F_1 + \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (6.25)$$

O *portfólio* 1 tem uma correlação perfeita para  $F_1$  e zero para os demais fatores econômicos, condições que havíamos determinado anteriormente. Os valores esperados de  $F_1$  e  $e_1, e_2, \dots, e_n$  no lado direito da equação (6.25) são todos zeros. Utilizando a equação (6.17) podemos reescrevê-la para o caso do *portfólio* 1:

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{1}} &= \sum_{i=1}^n x_i (r_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \lambda_3 b_{i3}) \\ &= r_f + \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i b_{i1} + \lambda_2 \sum_{i=1}^n x_i b_{i2} + \lambda_3 \sum_{i=1}^n x_i b_{i3} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sob as condições das equações (6.19) e (6.22) – (6.24), (6.26) é reduzida a

$$\mu_{\underline{1}} = r_f + \lambda_1 \quad (6.27)$$

Ou de forma equivalente a

$$\lambda_1 = \mu_{\underline{1}} - r_f \quad (6.28)$$

$\lambda_1$  é interpretado como o excesso do retorno do *portfólio* 1 com relação ao retorno do ativo livre de risco. Se  $r_f$  e  $\mu_1$  são conhecidos,  $\lambda_1$  também será. Podemos utilizar os passos realizados anteriormente para determinar os valores de  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Para o caso de 3 fatores econômicos comuns, o resultado

$$\mu_i = r_f + (\mu_{\underline{1}} - r_f)b_{i1} + (\mu_{\underline{2}} - r_f)b_{i2} + (\mu_{\underline{3}} - r_f)b_{i3}, i = 1, 2, \dots, n \quad (6.29)$$

é chamado de *Arbitrage Pricing Line*. Ela é uma relação de equilíbrio nos preços e relaciona o retorno esperado de cada ativo  $i$  com o retorno aleatório dos três fatores econômicos.

Como mencionado, diferentemente do CAPM, o modelo APT permite a existência de  $k$  variáveis que explicam os retornos dos ativos. O modelo APT é uma alternativa ao CAPM e suas críticas expostas principalmente nos trabalhos de Basu (1977), Banz (1981) e Bhandari (1988), onde mostram que outras variáveis também, além do risco sistemático, afetam os retornos dos ativos. Uma crítica ao APT, no entanto, é decorrente do critério para identificar quais fatores que afetam o retorno dos ativos, crítica similar feita para o ICAPM (ELBANNAN, 2014).

## 6.1 Testes Empíricos do APT

Roll e Ross (1980) testaram a validade empírica do APT. Os autores utilizaram a técnica de análise de fatores na tentativa de provar a validade do modelo. A partir desta técnica estatística é possível inferir quais os fatores que afetam os retornos dos ativos. Foram encontrados três fatores que explicam significativamente os retornos e ainda um quarto fator que possui baixo poder explicativo. Embora tenham sido encontrados os números de fatores, o autor aponta para a falha na interpretação econômica destes (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999). Roll e Ross (1980) apontam para futuros estudos que sejam testados os possíveis fatores comuns que afetam o retorno dos ativos.

Chen et. (1986) propõe a inclusão de variáveis macroeconômicas para representar fatores comuns de risco. O autor baseia-se na premissa que o preço de um ativo vai ser igual aos fluxos de caixa futuros descontados a uma taxa de desconto. Portanto, para a escolha dos fatores de risco, deve se considerar qualquer variável macroeconômica que afete o fluxo de caixa futuro, a expectativa dos investidores e a forma de como agentes descontam esse fluxo (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999). Testando para o mercado acionário americano, foram encontrados que os preços dos ativos são relacionados a mudanças na produção industrial, spread entre títulos do governo de longo e curto prazo, spread entre títulos de dívida de alto e baixo rating, mudanças na inflação esperada e mudanças na inflação não esperada. Outro resultado encontrado pelo autor foi que após considerar os fatores macroeconômicos, os índices de desempenho do mercado acionário não possuem influência nos retornos de ações individuais. Após o trabalho de Chen (1986), diversos autores testaram diferentes fatores macroeconômicos. A tabela abaixo resume quais foram os fatores testados e os efeitos no retorno.

Mesmo sendo continuamente testado após 3 décadas do artigo original de Ross (1976), o modelo APT sofre muitas críticas. Munshi (2014) argumenta que diversos testes do APT foram feitos com a intenção de mostrá-lo melhor que o CAPM e não com a

Figura 5:

Autor	País	Variáveis Independentes
McElroy e Burmeister (1988)	EUA	Risco de Crédito
		Taxas de Juros de Títulos Públicos
		Portfólio de Mercado
		Inflação Inesperada
		Varição Inesperada da Atividade Econômica
Priestley (1996)	Reino Unido	Preço de Commodities
		Varição Inesperada Preço Commodities
		Varição Inesperada Vendas Varejo
		Varição Inesperada Taxa de Câmbio
		Inflação Inesperada
		Produção Industrial
		Risco de Crédito
		Oferta Monetária
		Portfólio de Mercado
		Taxa de Câmbio
Bonomo (1998)	Brasil	Varição Inesperada Produção Industrial
		Inflação Inesperada
		Risco de Crédito
		Taxa de Juros Real
Antoniou (1998)	Reino Unido	Varição Inesperada Taxa de Câmbio
		Risco de Crédito
		Inflação Esperada
		Inflação Inesperada
		Oferta Monetária
		Portfólio de Mercado
Azeez e Yonezawa (2006)	Japão	Varição Inesperada Oferta Monetária
		Varição Inesperada Produção Industrial
		Inflação Inesperada
		Varição Inesperada da Estrutura Termo Tx. De Juros
		Varição Inesperada Taxa de Câmbio
		Varição Preço Imóveis
Malhotra (2010)	EUA	Portfólio de Mercado
		Diferencial de Juros
		Premio de Risco Corporativo
		Índice Preço/Lucro (P/E)
		Preço do Petróleo
		Taxa de Câmbio
Kristjanpoller e Morales (2011)	Chile	Taxas de Juros Curto Prazo
		Taxas de Juros Longo Prazo
		Inflação
		Portfólio de Mercado
		Atividade Econômica
		Preço do Cobre

intenção de testar a validade do modelo. Isso levou autores a praticar data dredging levando o APT a ser o modelo com menor sucesso de reprodução de resultados (MUNSHI, 2014). Kryzanowski (1994) criticou a alta presença de multicolinearidade entre as variáveis explicativas escolhidas nos modelos. Shanken (1982, 1985) argumenta que para a análise de ativos individuais a aproximação implicada pelo APT é tão imprecisa que se torna impossível testar se o modelo é verdadeiro ou falso (DIMSON e MUSSAVIAN, 1999). Shanken (1982, 1985) defende que novas premissas precisam ser adicionadas para testar a existência de uma relação de preços válida. Dimson e Mussavian (1999) expõem que embora o modelo APT tenha superado algumas das críticas expostas no modelo CAPM, ainda existem limitações para a verificação empírica do modelo.

## 6.2 Modelo de Três e Quatro Fatores

Observando a existência de outras variáveis relevantes para explicar retornos de ativos, Fama e French (1993) desenvolveram um novo modelo multifatorial. Dada a relevância observada na explicação dos retornos de variáveis ligadas a tamanho, alavancagem financeira, razão  $E/P$  e  $BE/ME$ , e os resultados do artigo de Fama e French (1992), Fama e French (1993) postularam um novo modelo de precificação. Esse modelo é conhecido como Modelo Três Fatores (*Three-Factor Model*) ou modelo Fama-French. Utilizando como base para construção o modelo de Black, Jensen e Scholes (1972), eles regridem os retornos das ações sobre fatores de risco relacionados a características de tamanho e razão  $BE/ME$ . Os autores desenvolvem as variáveis explicativas  $SMB$  (*Small minus Big*) e  $HML$  (*High minus Low*), em que  $SMB$  é a diferença entre retornos de portfólios diversificados de ações com baixa capitalização e ações com alta capitalização e  $HML$  é a diferença entre retornos de portfólios diversificados de ações com baixa razão  $BE/ME$  (*Growth Stocks*) e alta razão  $BE/ME$  (*Value Stocks*). Com a inclusão dessas novas variáveis explicativas, Fama e French testam o modelo descrito por:

$$R_{it} - R_{ft} = a_i + b_{iM}(R_{Mt} - R_{ft}) + b_{iS}SMB_t + b_{iH}HML_t + e_{it} \quad (6.30)$$

Na equação acima, é possível notar a presença de três betas diferentes capturando, o risco do mercado, o efeito do tamanho e o efeito do valor da companhia. Testando para o período de 1963 a 1991, o modelo de três fatores apresentou resultados melhores do que o modelo CAPM tradicional (Fama and French, 1993). Os autores explicam que o provável motivo das variáveis  $SMB$  e  $HML$  explicarem parte dos retornos dos ativos se dá pelo fato que ambas as variáveis produzem riscos não-diversificáveis não capturados pelo beta do CAPM tradicional e, portanto, precisam ser precificadas por outros betas (Fama and French, 2004). Fama e French (1998), ao acrescentarem ativos internacionais, constataram que o modelo obteve melhor desempenho em relação aos resultados gerados por um modelo CAPM. Atualmente o modelo Fama-French é amplamente usado em pesquisas empíricas na área de finanças. Loughran e Ritter (1995) e Mitchell e Stafford (2000), por exemplo, estudam a velocidade na precificação de novas informações calculando o valor do intercepto para a equação do modelo de 3 fatores (FAMA; FRENCH, 2004). Carhart (1997) analisa desempenho de gestores de fundo de investimento usando o modelo Fama e French.

Apesar disso, Jagadeesh e Titman (1993) mostraram que o modelo de três fatores de Fama e French não explica adequadamente o efeito momento. Segundo os autores, ações que obtêm bons retornos nos últimos 12 meses tendem a continuar a obter bons retornos nos próximos meses e ações com baixo retorno nos últimos 12 meses tendem a produzir também baixos retornos nos próximos meses (Fama and French, 2004). Dadas as evidências levantadas por Jagadeesh e Titman (1993), Carhart (1997) propõe acrescenta

o termo WML (*Winning minus Losers*), definido como a diferença, nos últimos 12 meses, entre o percentil de portfólio com maiores retornos e o percentil de portfólio com menores retornos. O modelo de Carhart (1997), é conhecido como modelo Quatro-Fatores ou modelo de Fama-French-Carhart é descrito abaixo:

$$E(R_i) - R_f = a_i + \beta_{i,M}(E(R_m) - R_f) + s_iSMB + h_iHML + w_iWML + e_i \quad (6.31)$$

O modelo quatro-fatores resolveu os problemas que o modelo Fama-French apresentava com relação ao efeito momento.

Embora tenham apresentado melhores resultados ao explicar retornos dos ativos em relação ao CAPM, os modelos de três e quatro fatores são suscetíveis a críticas. Frankel e Lee (1998), Dechow, Hutton e Sloan (1999) e Piotroski (2000) encontraram que ao se formar portfólios a partir de índices de valor, como BE/ME, ações que apresentam expectativas maiores de fluxo de caixa possuem maior retorno esperado. Esse maior retorno esperado não consegue ser explicado pelo modelo de três e quatro fatores e pelo CAPM, demonstrando que ainda existem fatores a serem estudados (FAMA e FRENCH, 2004). Outra crítica contundente é em relação à motivação de criação do modelo; o modelo Fama-French-Carhart apenas apresenta uma relação empírica entre fatores e retorno e não há embasamento teórico (FAMA e FRENCH, 2004). Não se explica, por exemplo, quais os fatores e os motivos que fazem as variáveis SMB e HML afetarem o retorno. Apenas é evidenciado que essas variáveis de alguma forma apresentam relação com retornos esperados de ativos financeiros.



## 7 Considerações Finais

Nesse trabalho foram apresentados os principais modelos de apreçamento de ativos desenvolvidos assim como seus principais resultados e limitações. Embora a existência de ativos financeiros venha de tempos antigos da civilização, somente no século XX foram desenvolvidas teorias capazes de explicar a forma como investidores deveriam precificar estes ativos. Os trabalhos de Markowitz (1952, 1959) e Tobin (1958) foram os precursores no desenvolvimento da teoria de finanças modernas. Markowitz (1952, 1959) modelou o comportamento do investidor racional a partir do conceito de média-variância; o investidor se importa somente com a média e a variância de sua riqueza no final do período ao analisar determinado ativo financeiro. A partir deste tipo de utilidade, Markowitz conseguiu provar matematicamente o velho bordão “não ponha todos seus ovos em uma única cesta” ao concluir que portfólios diversificados são melhores que portfólios não diversificados. Tobin (1958) contribuiu para a teoria de portfólio alegando que agentes econômicos ao maximizarem sua utilidade deveriam alocar sua riqueza em ativos considerados livre de risco e ativos arriscados. Ambas as teorias de Markowitz e Tobin foram posteriormente usadas para desenvolver a primeira teoria de apreçamento de ativos, o CAPM.

Os trabalhos desenvolvidos por John Lintner (1965), Jan Mossin (1966), William Sharpe (1964) e Jack Treynor (1962) marcam o início da teoria de precificação de ativos. O CAPM foi o modelo resultante das contribuições destes trabalhos. Dentre os resultados do CAPM, a conceituação do beta de mercado como única variável relevante de risco e sua relação com o risco sistemático foi um marco para a teoria de finanças. A simplicidade do conceito do beta permitia explicar os diferentes retornos esperados observados nas diferentes classes dos ativos. A aceitação teórica, no entanto, não se refletiu nos testes empíricos realizados durante os anos 70 e 80. O beta tinha, de fato, uma relação positiva e linear com os retornos dos ativos. No entanto, os testes mostraram que os betas estimados apresentavam valores menores do que os observados com os dados. Além disso, foi possível observar a relação entre outras variáveis explicativas e o retorno dos ativos, refutando a hipótese de que somente o beta de mercado tinha significância para explicar os retornos. O trabalho de Fama e French (1992) sumariza as principais falhas empíricas do modelo CAPM.

O ICAPM de Merton (1973) surge como resposta a algumas das falhas expostas no modelo CAPM tradicional. No trabalho de Merton foram incorporados dois conceitos importantes na teoria de finanças. O primeiro deles foi a possibilidade de o investidor não se importar somente com o valor médio e a variância de determinado investimento mas também com outras variáveis de estado da economia. Com a inclusão deste conceito, permitia-se a existência de múltiplos betas capazes de explicar retornos esperados.

O segundo conceito foi em relação às hipóteses acerca do espaço temporal de decisão do agente. No modelo CAPM assumia-se que o investidor considerava sua riqueza somente em dois períodos: o período inicial e o período final. Em oposição, o ICAPM de Merton assumia que o investidor assumia o tempo como uma variável contínua. Essa diferença no espaço temporal do agente fazia com que decisões de portfólio fossem diferentes nos dois modelos. Ainda que o ICAPM seja bem fundamentado teoricamente, não foi possível realizar testes empíricos que comprovassem as afirmações do modelo. Breedan (1979) utilizou o arcabouço teórico do ICAPM para derivar o modelo do CCAPM. O CCAPM postula que os excessos de retorno de um ativo estão relacionados a variáveis de consumo agregado. Ou seja, os investidores deveriam precificar seus ativos de acordo com covariância do consumo agregado com o portfólio de mercado. O beta do CCAPM mensura justamente essa relação. Entretanto, os testes do CCAPM mostraram que o modelo não era melhor que o CAPM tradicional ao explicar retornos esperados dos ativos.

Os modelos desenvolvidos até então eram baseados em modelos de equilíbrio com forte fundamentação econômica. Ross (1976) desenvolve o APT onde a conceituação é feita utilizando técnicas estatísticas e com a hipótese da não possibilidade de arbitragem. O APT parte de hipóteses menos restritivas em comparação aos outros modelos e a partir de equações geradoras de retorno desenvolve um modelo multifatorial para explicar retornos esperados porém o APT deixava em aberto quais variáveis independentes deveriam ser incluídas. Os modelos de três e quatro fatores apresentaram melhores resultados empíricos em relação a todos os outros modelos desenvolvidos anteriormente.

Dados os diversos modelos, qual seria o melhor para precificar ativos? Essa pergunta ainda é fonte de debates entre pesquisadores da área. Pesquisa conduzida por Graham e Harvey (2001) mostrou que 73,5% dos CFO's norte-americanos ainda utilizam o CAPM para estimar o custo de capital. Brounen, Abe de Jong e Koedijk (2004) encontraram que entre 213 CFO's entrevistados na Europa, 43% também utilizam o CAPM como modelo de precificação. Mesmo 60 anos após o surgimento do CAPM, grande parte do mercado ainda utiliza esse modelo mesmo com tantas críticas e poucas evidências empíricas de seu sucesso. Algumas explicações da não utilização de modelos mais sofisticados como, por exemplo, o Fama-French-Carhart e o CCAPM podem ser mencionadas. Uma das explicações pode estar relacionada ao custo de se estimar modelos sofisticados. O tempo e os recursos dedicados a obter dados pode ser alto demais a ponto de não se justificar utilizá-los. Outro motivo pode estar ligado ao ceticismo em melhores resultados que esses modelos podem gerar. Logo, porque usá-los se o resultado não irá diferir tanto assim do CAPM. Lam (2005) não encontra evidências que o modelo de três fatores seja melhor para estimar o custo do capital próprio em relação ao CAPM.

Mesmo com o todo o progresso nas teorias de precificação de ativos, ainda existe espaço para o desenvolvimento de modelos com maior robustez teórica e empírica. Atu-



almente, volumes altos de capital são alocados no mercado financeiro baseando-se em resultados destes modelos. Isso gera uma pressão, por parte da comunidade acadêmica, em continuar buscando melhores modelos de precificação. Um maior entendimento sobre o assunto possibilitará um aumento da eficiência na alocação de capital resultando em mercados financeiros mais eficientes.



## 8 Bibliografia

BANZ, R. W. **The relationship between return and market value of common stocks.** *Journal of Financial Economics*, v. 9, n. 1, p. 3-18, 1981.

BASU, S. **Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis.** 1977. 663-682 p.

BLACK, F. **Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing.** *The Journal of Business*, v. 45, n. 3, p. 444, 1972.

BLACK, F.; JENSEN, M. C; SCHOLES, M. **The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests.** 1972. V. 81. 79-121 p . BLUME, M. E.; FRIEND, I. **A New Look at The Capital Asset Pricing Model.** *Journal of Finance*, v. 28, n. 1, p. 19-33, 1973.

BHANDARI, L. C. **Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence.** *Journal of Finance*, v. 43, p. 507-528.

BREEDEN, D. T. **An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities.** *Journal of Financial Economics*, v. 7, n. 3, p. 265-296, 1979.

BREEDEN, D. T.; GIBBONS, M. R.; LITZENBERGER, R. H. **Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM.** *The Journal of Finance*, v. 44, p. 231-262, 1989.

BROUNEN, D.; JONG, A.; KOEDIJK, K. **Corporate Finance in Europe: Confronting Theory with Practice.** *Financial Management*, v. 33, 2004

BRUNO, A. **Risco, Retorno e Equilíbrio: Uma análise do Modelo de Precificação de Ativos Financeiros na Avaliação de Ações Negociadas na Bovespa.** *Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo*, 1998.

CAMPBELL, J.; MANKIW, N. **Consumption, Income and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence.** *NBER Macroeconomics Annual* 1989, v. 4, p. 185-246, 1989.

CAMPBELL, J. Y.; COCHRANE, J. H. **Explaining the Poor Performance of Consumption-based Asset Pricing Models.** *The Journal of Finance*, v. 55, n.6, p. 2863-2878, 2000.

CAHART, M. **On Persistence in Mutual Fund Performance.** *Journal of Finance*, v. 52, n.1, p. 57-82, 1997.

CAPPAUL, C.; ROWLEY, I.; SHARPE, F, WILLIAM. **International Value and Growth Stock Returns.** *Financial Analysts Journal*. 1993

- CHAN, L.; HAMAO, Y.; LAKONISHOK, J. **Fundamentals and Stock Returns in Japan.** *Journal of Finance*, v.46, p. 1739-1789.
- CHEN, N.; ROSS, S.; ROLL, R. **Economic Forces and the Stock Market.** *The Journal of Business*, v. 59, 1986.
- COCHRANE, J. H. **A Cross-Sectional Test of an Investment-Based Asset Pricing Model.** *Journal of Political Economy*, v. 104, p. 572, 1996.
- DEBONDT, W.; THALER, R. H.; **Further Evidence on Investor Overreaction and Stock Market Seasonality.** *Journal of Finance*, v. 42, p. 557-581.
- DECHOW, P.; HUTTON, A, P.; SLOAN, R. G. **An Empirical Assessment of the Residual Income Valuation Model.** *Journal of Accounting and Economics*, v. 26, p. 1-34, 1999.
- DIMSON, E.; MUSSAVIAN, M. **Three Centuries of Asset Pricing.** *Journal of Banking Finance*, v. 23, n.12, p. 1745-1769, 1999.
- ELBANNAN, M. A. **The Capital Asset Pricing Model: An Overview Theory.** *International Journal of Economics and Finance*, v. 7, 2014
- FAMA, E. F; MACBETH, J. **Risk, Return and Equilibrium: Empirical Tests.** *Journal of Political Economy*, v.81, n.3, p.607-636, 1973.
- FAMA, E. F; FRENCH, K. R. **The Cross-Section of Expected Stocks Returns.** 1992. 427-465 p.
- FAMA, E. F; FRENCH, K. R. **Common Risk Factors in the Return on Stocks and Bonds.** *Journal of Financial Economics*, v. 33, n.1, p. 3-56, 1993.
- FAMA, E. F; FRENCH, K. R. **The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence.** *Journal of Economic Perspectives*, v. 18, n.3, p.25-46, 2004.
- FAMA, E. F; FRENCH, K. R. **Value versus Growth: The International Evidence.** *Journal of Finance*, v. 53, p. 1975-1999.
- FRANKEL, R.; LEE, C. M. **Accounting Valuation, Market Expectation and Cross-Sectional Stock Returns.** *Journal of Accounting and Economics*, v. 25, p. 283-319, 1998
- GIBBONS, M. R. **Multivariate tests of financial models.** *Journal of Financial Economics*, v. 10, n. 1, p. 3-27, 1982.
- GEHR, A. **Some Tests of the Arbitrage Pricing Theory.** *Journal of the Midwest Finance Association*, v. 7, p. 91-95.
- GRAHAM, J.; HARVEY, C. **The Theory and Practice of Corporate Finance: Evidence from de field.** *Journal of Financial Economics*, v.60, p. 187-243, 2001
- HAUGEN, R. **The New Finance: The Case Against Efficient Market.**

- HANSEN, L.; SINGLETON, H. **Computing Semiparametric Efficiency Bounds for Linear Time Series Models**. *Cambridge University Press* (1992)
- HUBERMAN, G. **Arbitrage Pricing Theory**. *Federal Reserve Bank of New York*, Staff Report no. 216, 2005.
- JAGANNATHAN, R.; MCGRATTAN, E. R. **The CAPM Debate**. *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, v. 19, n. 4, p. 2-17, 1995.
- JEGADEESH, N.; TITMAN, S. **Returns to Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency**. *Journal of Finance*, v. 48, p. 65-91, 1993
- JENSEN, M. C. **The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964**. *Journal of Finance*. v. 23, p. 389-416, 1968.
- LAM, K. **Is the Fama-French Three Factor Model Better than the CAPM?** *Project submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of arts in Simon Fraser University*, 2005
- LAKONISHOK, J.; SHLEIFER, A.; VISHNY, R. W.; **Contrarian Investment, Extrapolation and Risk**. *Journal of Finance*, v. 49, p. 1541-1578, 1994.
- LAKONISHOK, J.; SHAPIRO, A.; **Systematic Risk, Total Risk and Size as Determinants of Stock Market Returns**. *Journal of Banking and Finance*, v. 10, p. 115-132, 1986.
- LETTAU, M.; LUDVIGSON, S. **Consumption, Aggregate Wealth and Expected Stock Returns**. *Journal of Finance*, v. 56, p. 815-849, 2001.
- LINTNER, J. **Security prices, risk and maximal gains from diversification**. *Journal of Finance*, v. 20, n. 4, p. 587-615, 1965.
- MANKIW, N. G.; SHAPIRO, M. D. **Risk and Return: Consumption Beta versus Market Beta**. *The Review of Economics and Statistics*, v. 68, n.3, p. 452-459, 1986.
- MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection**. *Journal of Finance*, *Harvard University Press Oxford University Press*, v.7, n.1, p.77-91, 1952.
- MARKOWITZ, H. **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**. 1959. 217-234, p.
- MERTON, R. C. **An Intertemporal Capital Asset Pricing Model**. *Econometrica*, v. 41, n. 5, p. 867-887, 1973.
- MOSSIN, J. **Equilibrium in a Capital Asset Market**. *Econometrica*, 34, v.4, p. 768-783.
- MUNSHI, J. **The Rise and Fall of the Arbitrage Pricing Theory**. 2014
- PIOTROSKI, J. **Value Investing: The Use of Historical Financial Statement**

**Information to Separate Winners from Losers.** *Journal of Accounting Research*, v. 38, 2000

ROLL, R. **A Critique of the asset pricing theory's tests part I: On past and potential testability of the theory.** 1977. 129-176 p.

ROLL, R.; ROSS, S. A. **An empirical investigation of the arbitrage pricing theory.** *Journal of Finance*, v. 35, p. 1073-1103.

ROSENBERG, B.; KENNETH, R.; LANSTEIN, R. **Persuasive Evidence of Market Inefficiency.** *Journal of Portfolio Management*, v. 11, p. 9-17.

ROSS, S. A. **The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing.** *Journal of Economic Theory*, v. 13, p. 341-360, 1976.

ROSTAGNO, L. M.; SOARES, R. O.; SOARES, K. T. C. **Estratégias de valor no mercado de ações brasileiro.** *Revista Eletronica de Administração de UFRGS*, v. 11, n. 6, 2005.

SHANKEN, J. **The Arbitrage Pricing Theory: Is it Testable?** *Journal of Finance*, v. 37, p. 1129-1140, 1982

SHANKEN, J. **Multi-beta CAPM or Equilibrium APT? A Reply?** *Journal of Finance*, v. 40, p. 1189-1196, 1985.

SHARPE, W. F. **Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk.** *The Journal of Finance*, v. 19, n.3, p. 425-442, 1964.

STAMBAUGH, R. F. **On the exclusion of assets from tests of the two-parameter model.** *Journal of Financial Economics*, v. 10, n. 3, p. 237-268, 1982.

STATTMAN, D. **Book Values and Stock Returns.** *A Journal of Selected Papers*, v. 4, p. 25-45.

TOBIN, J. **Liquidity preference as behavior towards risk.** *The Review of Economic Studies*, v. 25, n. 2, p. 65-86, 1958.

YOSHINO, J. A.; SANTOS, E. B. **Is CAPM dead or alive in the brazilian equity Market?** *Review of Applied Economics*, v. 5, n. 2, 2009